線形不等式と不動点定理(作用素論とその周辺)

高橋, 渉

数理解析研究所講究録
653巻 1988年 130-152

線形不等式と不動点定理

東工大 理 高橋 渉 (Wataru Takahashi)

Fanは凸不等式のシステムに関するつぎの定理を証明した。

定理A(Fanのシステム定理) Xを線形位相空間のコンパクトで凸な集合とし, $f_1, f_2, \cdots, f_n$をX上で定義され, 値を$(-\infty, \infty)$にとる下半連続で凸な関数とする. このとき, つぎの条件(1)と(2)は同値である.

(1) n個の不等式のシステム

$$f_i(x) \leqq c \quad (i=1, 2, \cdots, n)$$

が解をもつ.

(2) $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$となる非負な数$\{\alpha_i\}_{i=1}^{n}$に対して,

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i(y) \leqq c$$

となる$y \in X$が存在する.

この定理はminimax定理, またはFan-Browderの集合値写像に対する不動点定理を用いて証明されるが, それはいろい

ろの存在定理を証明する上で非常に重要な定理である．ここではまずこの定理を2つの方向から拡張することを試みる．1つは定理Aからコンパクト性と凸性をはずすことである．他の1つは，定理Aにおいて，下半連続で凸な関数f_iを値を$(-\infty, \infty]$までとるような場合まで拡張することである．実際，$\{f_\alpha\}$が連続な凸関数の族で$(-\infty, \infty)$に値をとるような場合であっても

$$g(x) = \sup_\alpha f_\alpha(x)$$

で定義される下半連続で凸な関数gは$(-\infty, \infty]$に値をとることがあるからである．定理Aからコンパクト性と凸性をはずした定理を用いると，最近Simonsによって証明されたコンパクト性を仮定しないminimax定理を簡単に証明することができる．またMarkov-Kakutaniの不動点定理とFanのシステム定理を用いると，Mazur-Orliczの定理が証明できるが，この定理を用いると，Hahn-Banachの拡張定理とKönigの定理が簡単に証明できる．Königの定理は分離定理と最短距離に関する定理の拡張定理を得るのに便利である．

上述のように，ここではFanのシステム定理を2つの方向から拡張することを1つの目的とするが，Fanの定理がいろいろの分野（特にここでは作用素論の分野）で非常に有効であることを強調するのもここでの目的である．

§1. Fanのシステム定理の証明

Fan [4] はFanのシステム定理をminimax定理から証明したが，ここでは集合値写像の不動点定理から証明することを試みる．まず，Brouwerの不動点定理と1の分解定理を用いてつぎの不動点定理を証明することから始めよう．

補助定理1．Eを線形位相空間（Hausdorffを仮定する）とする．YをEのコンパクト集合とし，XをEの凸部分集合で$X \subset Y$となるものとする．AをXから2^Y（Yの部分集合の全体）への写像で，任意の$y \in Y$に対して，$A^{-1}y$がつねに凸集合になっているものとする．このとき，Xから2^Yへの写像Bで，つぎの3つの条件：

(1) 任意の$x \in X$に対して，$Bx \subset Ax$である；

(2) 任意の$y \in Y$に対して，$B^{-1}y \neq \phi$である；

(3) 任意の$x \in X$に対して，Bxは開集合である

を満たすものが存在するならば，$x_0 \in Ax_0$となる$x_0 \in X$が存在する．

証明　すべての$y \in Y$に対して，$B^{-1}y \neq \phi$であるから，

$$Y = \bigcup_{x \in X} Bx$$

である．すなわち，$\{Bx ; x \in X\}$はYの開被覆になっている．ここでYはコンパクトであるから，$Y = \bigcup_{i=1}^{n} Bx_i$となるような

Xのn個の元$\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$が存在する．いまYの開被覆$\{Bx_1, Bx_2, \cdots, Bx_n\}$に対応する1の分解を$\{\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n\}$とし，Y上に写像$p$を

$$p(y) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i(y) x_i \quad (\forall y \in Y)$$

で定義すると，pはYからXへの連続写像となる．またこのpはすべての$y \in Y$に対して，$p(y) \in A^{-1}y$でもある．実際，$y \in Y$に対して，$\beta_i(y) \neq 0$ならば$y \in Bx_i$となり，$B^{-1}y \ni x_i$である．(1)より$B^{-1}y \subset A^{-1}y$であり，$A^{-1}y$は凸集合であるから$p(y) \in A^{-1}y$である．X_0を$\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$によって張られる凸集合とすると，この$X_0$は$\mathbb{R}^n$のコンパクト凸集合Kと同相になるから，$X_0$からKへの同相写像を$f$とすると，$fpf^{-1}$はKからKへの連続写像になる．よってBrouwerの不動点定理を用いると，$fpf^{-1}(x_0) = x_0$となるような$x_0 \in K$が存在する．これは$pf^{-1}(x_0) = f^{-1}(x_0)$を意味するので，$y_0 = f^{-1}(x_0)$とおくと，$y_0 = p(y_0)$である．$p(y_0) \in A^{-1}y_0$であるから$y_0 \in A^{-1}y_0$となる．よって，$y_0 \in Ay_0$である．

上の補助定理で，X = Y，A = Bとすると有名なFan－Browderの不動点定理が得られる．つぎの存在定理はFan－Browderの不動点定理から証明できる．

補助定理2．Xを線形位相空間Eのコンパクトな凸集合と

し，F をつぎの条件(1)，(2)，(3)を満たす $X\times X$ 上の実数値関数とする．

(1)　$y\in Y$ に対し，x の関数 $F(x,y)$ は上半連続である；

(2)　$x\in X$ に対し，y の関数 $F(x,y)$ は凸関数である；

(3)　$F(x,x)\geqq c$ $(\forall x\in X)$ となるような実数 c が存在する．

このとき，$F(x_0,y)\geqq c$ $(\forall y\in X)$ となる $x_0\in X$ が存在する．

証明　任意の $x\in X$ に対して，$F(x,y)<c$ となる $y\in X$ がつねに存在するとし，X から 2^X への写像 A を

$$Ay=\{x\in X : F(x,y)<c\}\quad(\forall y\in Y)$$

で定義しよう．すると，Ay は開集合である．また，

$$A^{-1}x=\{y\in X : F(x,y)<c\}$$

であるから，$A^{-1}x$ は空でない凸集合である．よって，補助定理1から $x_0\in Ax_0$ となる $x_0\in X$ が存在する．これは $F(x_0,x_0)<c$ を意味するから，$c\leqq F(x_0,x_0)$ に矛盾する．

補助定理3．X と Y を位相空間とする．β を X から $[0,\infty)$ への連続関数とし，f を Y から $(-\infty,\infty]$ への下半連続な関数とする．このとき，

$$(\beta\cdot f)(x,y)=\beta(x)f(y)\quad(\forall x\in X,\ \forall y\in Y)$$

で定義される $X\times Y$ 上の関数 $\beta\cdot f$ は下半連続である．

証明　$a\in\mathbb{R}$ とする．このとき，

$$A=\{(x,y)\in X\times Y : \beta(x)f(y)>a\}$$

が $X\times Y$ で開集合であることを示せば十分である．$(x_0, y_0)\in A$ としよう．まず $\beta(x_0)>0$ のときは

$$\beta(x_0)>\varepsilon,\quad (\beta(x_0)-\varepsilon)f(y_0)>a,\quad (\beta(x_0)+\varepsilon)f(y_0)>a$$

となるような $\varepsilon>0$ がとれる．いま

$$U=\{x\in X: |\beta(x)-\beta(x_0)|<\varepsilon\}$$
$$\times\left\{y\in Y:\ f(y)>\max\left[\frac{a}{\beta(x_0)+\varepsilon},\ \frac{a}{\beta(x_0)-\varepsilon}\right]\right\}$$

とおくと，U は開集合で，しかも $(x_0, y_0)\in U\subset A$ である．実際，$(x, y)\in U$ とすると，$a\geqq 0$ のときは

$$\beta(x)f(y)>\beta(x)\frac{a}{\beta(x_0)-\varepsilon}\geqq a$$

となり，$(x, y)\in A$ である．$a<0$ のときは

$$\beta(x)f(y)>\beta(x)\frac{a}{\beta(x_0)+\varepsilon}>a$$

となり，$(x, y)\in A$ である．つぎに $\beta(x_0)=0$ としよう．このとき，$a<0$ なので $\delta\cdot f(y_0)>a$ となるような $\delta>0$ が存在する．そこで，

$$V=\{x\in X:\ 0\leqq\beta(x)<\delta\}\times\left\{y\in Y:\ f(y)>\frac{a}{\delta}\right\}$$

とおけば，V は開集合であり，$(x_0, y_0)\in V\subset A$ である．実際，もし $(x, y)\in V$ ならば

$$\beta(x)f(y) > \beta(x)\frac{a}{\delta} > a$$

となり，$(x, y)\in A$ である．これは証明を完了する．

補助定理2と3を用いて，Fanのシステム定理を証明する．

定理A（Fanのシステム定理）の証明　(2)における y として，(1)の解をとれば (1)⇒(2) は明らかである．(2)⇒(1) を証明する．$f_i(x_0)\leqq c$ $(i=1, 2, \cdots, n)$ となる $x_0\in X$ が存在しないとする．このとき，

$$G_i=\{x\in X : f_i(x)>c\} \quad (i=1, 2, \cdots, n)$$

とすると，$\{G_1, G_2, \cdots, G_n\}$ は X の開被覆になる．いまこの開被覆に対応する1の分解を $\{\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n\}$ とし，$X\times X$ 上の関数を

$$F(x, y)=\sum_{i=1}^{n}\beta_i(x)f_i(y)$$

とすると，F は補助定理の(1)と(2)を満たしており，さらに，$g(x)=F(x, x)$ は補助定理3より下半連続である．よって，すべての x に対して，$F(x, x)\geqq c_0>c$ となるような実数 c_0 が存在する．そこで補助定理2が使えて，すべての $y\in X$ に対し

$$F(x_0, y)\geqq c_0>c$$

となるような $x_0\in X$ の存在がわかる．すなわち，すべての $y\in X$ に対して

$$\sum_{i=1}^{n} \beta_i(x_0) f_i(y) > c$$

であり，$\sum_{i=1}^{n} \beta_i(x_0) = 1$ となるような非負な数 $\{\beta_i(x_0)\}$ が存在したことになる．よって (2) ⇒ (1) は証明された．

§2. Fan のシステム定理の拡張

まず Fan のシステム定理からコンパクト性と凸性をはずすことを試みよう．その前に定義を与えておく．

X，Y を空でない集合とし，F を $X \times Y$ 上の実数値関数とする．このとき，$F(x, y)$ が第 1 変数に関して convexlike であるとは，任意の $x_1, x_2 \in X$ と α ($0 \leqq \alpha \leqq 1$) に対して，ある $x_0 \in X$ が存在して，不等式

$$F(x_0, y) \leqq \alpha F(x_1, y) + (1-\alpha) F(x_2, y) \quad (^\forall y \in Y)$$

がつねに成立することである．concavelike についても不等式

$$F(x_0, y) \geqq \alpha F(x_1, y) + (1-\alpha) F(x_2, y) \quad (^\forall y \in Y)$$

で同様に定義できる．

定理 1． X をある集合，$f_1, f_2, \cdots, f_n$ を X 上の実数値関数とする．$I = \{1, 2, \cdots, n\}$ とし，$X \times I$ 上の関数 F を

$$F(x, i) = f_i(x) \quad (^\forall i \in I, {}^\forall x \in X)$$

とする．また，F を第 1 変数に関して convexlike であるとし，$c \in \mathbb{R}$ とする．このとき，$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$ となる n 個の非負な数 $\{\alpha_i\}_{i=1}^{n}$ に対して，

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i(x_0) \leqq c$$

となる $x_0 \in X$ が存在するなら，

$$\inf_{x \in X} \max_i f_i(x) \leqq c \ .$$

定理1を証明する前につぎのようなminimax定理を証明しておく．

補助定理4．Xを線形位相空間のコンパクトで凸な集合とし，Yを単なる集合とする．Fを$X \times Y$上の実数値関数でつぎの(1)と(2)の条件を満たすものとする．

(1)　$y \in Y$を固定したとき，xの関数$F(x, y)$は下半連続な凸関数である；

(2)　$F(x, y)$は第2変数に関してconcavelikeである．

このとき，

$$\sup_{y \in Y} \min_{x \in X} F(x, y) = \min_{x \in X} \sup_{y \in Y} F(x, y).$$

証明　$c = \sup_{y \in Y} \min_{x \in X} F(x, y)$ とし，$\{y_1, y_2, \cdots, y_n\}$ をYの任意の有限集合とする．いま $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$ となるn個の非負な数$\{\alpha_i\}_{i=1}^{n}$をとると，(2)より $y_0 \in Y$ が存在して

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i F(x, y_i) \leqq F(x, y_0) \ (\forall x \in X)$$

となる．この y_0 に対して，$c=\sup_{y\in Y}\min_{x\in X}F(x,y)$ より $F(x_0,y_0)\leqq c$ となる $x_0\in X$ が存在する．すなわち，$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i=1$ となる非負な数 $\{\alpha_i\}_{i=1}^{n}$ に対して

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i F(x_0,y_i)\leqq F(x_0,y_0)\leqq c$$

となる $x_0\in X$ が存在する．ここで定理A（Fanのシステム定理）を用いると

$$\bigcap_{i=1}^{n}\{x\,;\,F(x,y_i)\leqq c\}\neq\phi$$

がいえたことになる．X がコンパクトなので

$$\bigcap_{y\in Y}\{x\,;\,F(x,y)\leqq c\}\neq\phi$$

となる．これは $\min_{x\in X}\sup_{y\in Y}F(x,y)\leqq c$ を意味するので

$$c=\sup_{y\in Y}\min_{x\in X}F(x,y)\geqq\min_{x\in X}\sup_{y\in Y}F(x,y)$$

である．逆の不等式は明らかであるから

$$\sup_{y\in Y}\min_{x\in X}F(x,y)=\min_{x\in X}\sup_{y\in Y}F(x,y).$$

定理1の証明

$$Y=\left\{\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n):\alpha_i\geqq 0,\ \sum_{i=1}^{n}\alpha_i=1\right\}$$

とし

$$f(x,\alpha)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i f_i(x)\quad\left({}^{\forall}x\in X,\ {}^{\forall}\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\in Y\right)$$

とする．すると，f は第1変数に関して convexlike である．実際 $F(x,i)=f_i(x)$ は第1変数に関して convexlike であるから $a+b=1$ となるような $a,b\geqq 0$ と $x,y\in X$ に対して

$$
\begin{aligned}
a f(x,\alpha)+b f(y,\alpha) &= \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\{a f_i(x)+b f_i(y)\} \\
&\geqq \sum_{i=1}^{n}\alpha_i f_i(z) = f(z,\alpha) \quad ({}^{\forall}\alpha\in Y)
\end{aligned}
$$

となるような $z\in X$ が存在する．だから補助定理4の変形によって

$$\inf_{x\in X}\max_{\alpha\in Y} f(x,\alpha)=\max_{\alpha\in Y}\inf_{x\in X} f(x,\alpha)\leqq c$$

となる．$f(x,\alpha)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i f_i(x)$ であるから

$$\inf_{x\in X}\max_{i} f_i(x)\leqq c .$$

定理1の直接的な結果として，つぎの系を得る．

系1．X を線形空間の凸集合とし，$f_1,f_2,\cdots,f_n$ を X 上の実数値凸関数とする．もし，$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i=1$ となる n 個の非負な数 $\{\alpha_i\}_{i=1}^{n}$ に対して

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i f_i(x_0)\leqq c$$

となる $x_0\in X$ が存在するならば，このとき，

$$\inf_{x\in X}\max_{i} f_i(x)\leqq c .$$

つぎに，Fan のシステム定理を，関数 f_i の値が $(-\infty, \infty]$ までとるような場合まで拡張することを試みる。

定理2．X を線形位相空間 E のコンパクトで凸な集合とする．$f_1, f_2, \cdots, f_n$ を X から $(-\infty, \infty]$ に値をとる下半連続で凸な関数とする．このとき，つぎの命題は同値である．

(1) 凸不等式のシステム

$$f_i(x) \leqq 0 \quad (i=1, 2, \cdots, n)$$

が X 上で解をもつ；

(2) $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$ となる非負な数 $\{\alpha_i\}_{i=1}^{n}$ に対して

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i(y) \leqq 0$$

となる $y \in X$ が存在する．

証明　(1)が(2)を意味することは明らかである．(2)⇒(1) を証明しよう．

$$A = \bigcap_{i=1}^{n} \{x \in X ; f_i(x) < \infty\}$$

とする．$\alpha_i = \frac{1}{n}$ $(i=1, 2, \cdots, n)$ とすると，(2)から $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f_i(x) \leqq 0$ となる $x \in X$ が存在する．これは $x \in A$ を意味する．だから A は空でない．まず $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$ となる非負な数 $\{\alpha_i\}_{i=1}^{n}$ に対して

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i(x) \leqq 0$$

となる $x \in A$ が存在することを示す。ここで，$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m > 0$

で，$\alpha_{m+1}=\cdots=\alpha_n=0$ を仮定しても一般性を失わない．実際 $m=n$ ならば，(2) から $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i f_i(x)\leqq 0$ となる $x\in A$ がとれるので，上のことは証明されたことになる．そこで $1\leqq m<n$ としよう．$0<t<1$ となる t に対して，(2) から

$$\sum_{i=1}^{m} t\alpha_i f_i(x_t)+\sum_{i=m+1}^{n}\frac{1-t}{n-m}f_i(x_t)\leqq 0 \qquad \cdots \quad (*)$$

となるような $x_t\in A$ がとれる．$0<t<1$ となるある t に対し

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i f_i(x_t)\leqq 0$$

ならば，上のことは証明されたことになるので，すべての t （$0<t<1$）に対して

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i f_i(x_t)>0$$

と仮定できる．$\alpha_{m+1}=\cdots=\alpha_n=0$ であるので

$$\sum_{i=1}^{m} t\alpha_i f_i(x_t)>0 \qquad \cdots \quad (**)$$

である．よって $(*)$，$(**)$ から

$$\sum_{i=m+1}^{n} f_i(x_t)\leqq 0 \qquad \cdots \quad (***)$$

を得る．X はコンパクトだから，$\{x_t\}$ の部分ネット $\{x_{t_\gamma}\}$ で，$t_\gamma\to 1$，$x_{t_\gamma}\to x_0\in X$ となるものが存在する．$(*)$，$(***)$ と補助定理3を用いると

$$\sum_{i=1}^{m}\alpha_i f_i(x_0) \leqq \liminf_{r}\left(\sum_{i=1}^{m} t_r\alpha_i f_i(x_{t_r}) + \sum_{i=m+1}^{n}\frac{1-t_r}{n-m} f_i(x_{t_r})\right) \leqq 0,$$

$$\sum_{i=m+1}^{n} f_i(x_0) \leqq \liminf_{r}\sum_{i=m+1}^{n} f_i(x_{t_r}) \leqq 0$$

を得る．上の２つの式から $x_0 \in A$ であり

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i f_i(x_0) \leqq 0$$

である．ここで定理１を用いると，

$$\inf_{x\in X}\max_{i} f_i(x) \leqq \inf_{x\in A}\max_{i} f_i(x) \leqq 0$$

を得る．X はコンパクトであり，$\max_i f_i(x)$ は下半連続であるから $\max_i f_i(x_0) \leqq 0$ となる $x_0 \in X$ が存在する．ゆえに

$$f_i(x_0) \leqq 0 \quad (i=1, 2, \cdots, n)$$

となる．

この定理を用いて，つぎの定理も得られる．

定理３．X を線形位相空間 E の空でないコンパクトな凸集合とする．$\{f_\nu : \nu\in I\}$ を X から $(-\infty, \infty]$ に値をとる下半連続で凸な関数の族とする．このとき，つぎの命題は同値である．

(1) 凸不等式のシステム

$$f_\nu(x) \leqq 0 \quad (\nu \in I)$$

が X 上で解をもつ．

(2) $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i = 1$ となる n 個の非負な数 $\{\alpha_i\}_{i=1}^{n}$ と $\nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_n \in I$

に対して

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i f_{y_i}(x) \leqq 0$$

となる $x \in X$ が存在する.

証明　X がコンパクトであることと定理2を用いれば明らかである.

§3. システム定理の応用

この節ではまず初めに定理1を用いて最近Simonsによって証明されたminimax定理を簡単に証明する. そのあとFanのシステム定理(または定理2)を用いて, Hardy-Littlewood-Pólyaの定理を簡単に証明する(これは[4]による). 同様の手法で無限次元のHardy-Littlewood-Pólyaの定理が証明できるが, ここではその結果だけを述べることにする. また, Fanのシステム定理はMarkov-Kakutaniの不動点定理を介在にすると, Mazur-Orliczの定理やKönigの定理の証明にも有効であるがここでは紙面の都合上省略する.

X を空でない集合とし,

$$F(X) = \{X_0 : \phi \neq X_0 \subset X,\ X_0 \text{は有限集合}\}$$

とする.

定理4(Simons). X, Y を任意の集合とし, f, g を $X \times Y$ 上の実数値関数で, つぎの(1), (2), (3)の条件を満たすものとする.

(1) $f(x,y) \leqq g(x,y)$ $({}^{\forall}(x,y) \in X \times Y)$;

(2) f は第2変数に関して convexlike である；

(3) g は第1変数に関して concavelike である．

このとき，つぎの (i), (ii), (iii) が成立する．

(i) $X_0 \in F(X)$, $Y_0 \in F(Y)$ に対して

$$\inf_{y \in Y} \max_{x \in X_0} f(x,y) \leqq \sup_{x \in X} \min_{y \in Y_0} g(x,y).$$

(ii) $\sup_{x \in X} \inf_{y \in Y} g(x,y) > -\infty$ ならば，$X_0 \in F(X)$ に対して

$$\inf_{y \in Y} \max_{x \in X_0} f(x,y) \leqq \sup_{x \in X} \inf_{y \in Y} g(x,y).$$

(iii) Y がコンパクト集合で，f が第2変数に関して下半連続ならば

$$\min_{y \in Y} \sup_{x \in X} f(x,y) \leqq \sup_{x \in X} \inf_{y \in Y} g(x,y).$$

証明 (i) $\sup_{x \in X} \min_{y \in Y_0} g(x,y) = c$ とし，$X_0 = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ とする．すると，$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$ となる非負な数 $\{\alpha_i\}_{i=1}^{n}$ に対して

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(x_i, y) \leqq \sum_{i=1}^{n} \alpha_i g(x_i, y) \leqq g(x_0, y) \quad ({}^{\forall}y \in Y)$$

となる $x_0 \in X$ が存在する．$g(x_0, y_1) \leqq c$ である $y_1 \in Y_0$ が存在するので

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(x_i, y_1) \leqq c$$

である。定理1より

$$\inf_{y\in Y}\max_{x\in X_0} f(x,y) \leqq c = \sup_{x\in X}\min_{y\in Y_0} g(x,y).$$

(ii) $\sup_{x\in X}\min_{y\in Y} g(x,y) = c$ とし，$\varepsilon > 0$ とする．$X_0 = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ と n 個の非負な数 $\{\alpha_i\}_{i=1}^n$ で $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$ となるものに対して，(i) の場合と同様にして

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i f(x_i, y_1) \leqq c + \varepsilon$$

となるような $y_1 \in Y$ が存在する．ここで定理1を使って

$$\inf_{y\in Y}\max_{x\in X_0} f(x,y) \leqq c = \sup_{x\in X}\inf_{y\in Y} g(x,y).$$

(iii) 任意の有限集合 X_0 に対して，$\max_{x\in X_0} f(x,y)$ は下半連続である．また Y はコンパクトなので $\sup_{x\in X}\inf_{y\in Y} g(x,y) = c$ とすると，$\max_{x\in X_0} f(x, y_0) \leqq c$ となる $y_0 \in Y$ が存在する．そこで

$$\bigcap_{x\in X}\{y\in Y;\ f(x,y)\leqq c\} \neq \phi.$$

よって，

$$\min_{y\in Y}\sup_{x\in X} f(x,y) \leqq c = \sup_{x\in X}\inf_{y\in Y} g(x,y).$$

つぎに Hardy-Littlewood-Pólya の定理を Fan のシステム定理を使って証明してみよう．

$n\times n$ 行列 $\{p_{ij}\}$ が doubly stochastic であるとは，$p_{ij} \geqq 0$

であり，かつ

$$\sum_{i=1}^{n} p_{ij}=1 \quad (\forall j), \quad \sum_{j=1}^{n} p_{ij}=1 \quad (\forall i)$$

を満たすときをいう．

定理 5 (Hardy-Littlewood-Pólya)．実数 a_i, b_i $(1 \leqq i \leqq n)$ がつぎの条件を満たすものとする：

$$a_1 \geqq a_2 \geqq \cdots \geqq a_n \geqq 0, \quad b_1 \geqq b_2 \geqq \cdots \geqq b_n \geqq 0,$$

$$\sum_{i=1}^{k} a_i \leqq \sum_{i=1}^{k} b_i \quad (1 \leqq k \leqq n), \quad \sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} b_i .$$

このとき，

$$a_i = \sum_{j=1}^{n} p_{ij} b_j \quad (1 \leqq i \leqq n)$$

となるような $n \times n$ の doubly stochastic 行列 $\{p_{ij}\}$ が存在する．

証明　K を $n \times n$ の doubly stochastic 行列の全体とする．このとき，K は n^2-次元ユークリッド空間のコンパクト凸集合とみなされる．任意の $n \times n$ doubly stochastic 行列 $P=\{p_{ij}\}$ に対して，

$$f_i(P) = a_i - \sum_{j=1}^{n} p_{ij} b_j \quad (1 \leqq i \leqq n)$$

を定義しよう．このとき，定理の結論は $2n$ 個の不等式のシステム

$$f_i(P) \leqq 0, \quad -f_i(P) \leqq 0 \quad (1 \leqq i \leqq n)$$

が解をもつことと同値である．Fan のシステム定理にしたが

って，これはつぎの命題を証明すれば十分である：

任意の実数 c_i に対して，

$$\sum_{i=1}^{n} c_i f_i(P) \leqq 0 \qquad \cdots \quad (*)$$

となるような $n \times n$ doubly stochastic 行列 $P = \{p_{ij}\}$ が存在する．

(*)式は

$$\sum_{i=1}^{n} c_i a_i \leqq \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_i p_{ij} b_j \qquad \cdots \quad (**)$$

と同じであるから，$c_i \geqq 0$ の場合に(**)を考えればよい．実際，$c_i' = c_i + d \geqq 0$ $(1 \leqq i \leqq n)$ となるように $d \geqq 0$ をとることができ，$n \times n$ の doubly stochastic 行列 $P = \{p_{ij}\}$ が

$$\sum_{i=1}^{n} c_i' a_i \leqq \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_i' p_{ij} b_j$$

を満たすならば，$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} b_i$ と $\sum_{i=1}^{n} p_{ij} = 1$ によって，

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} d\, p_{ij} b_j = d \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} p_{ij} b_j = d \sum_{j=1}^{n} b_j = d \sum_{i=1}^{n} a_i$$

となるから，同じ行列 $P = \{p_{ij}\}$ が (**) を満たす．

いまや $c_i \geqq 0$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ の場合を考えよう．π を $1, 2, \cdots, n$ の置換で $c_{\pi(1)} \geqq c_{\pi(2)} \geqq \cdots \geqq c_{\pi(n)}$ なるものとしよう．このとき，$P' = \{p_{ij}\}$ を

$$p_{ij} = \begin{cases} 1 & (i = \pi(j) \text{ のとき}) \\ 0 & (i \neq \pi(j) \text{ のとき}) \end{cases}$$

とすると，$P' = \{p_{ij}\}$ は $(**)$ を満たす．実際，

$$a_1 \geqq a_2 \geqq \cdots \geqq a_n \geqq 0, \quad b_1 \geqq b_2 \geqq \cdots \geqq b_n \geqq 0,$$

$$\sum_{i=1}^{k} a_i \leqq \sum_{i=1}^{k} b_i \quad (1 \leqq k \leqq n)$$

から，

$$\sum_{i=1}^{n} c_i a_i \leqq \sum_{i=1}^{n} c_{\pi(i)} a_i \leqq \sum_{i=1}^{n} c_{\pi(i)} b_i = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_i p_{ij} b_j$$

となるからである．よって定理は証明できた．

(X, Σ, μ) を σ-finite measure space とし，μ を Σ 上の σ-finite measure とする．$[L^1(X)]$ で $L^1(X)$ 上の有界線形作用素の全体を，$[L^\infty(X)]$ で $L^\infty(X)$ 上の有界線形作用素の全体を表すものとする．このとき，$S \in [L^\infty(X)]$ がつぎの３つの条件を満たすならば doubly-substochastic 作用素であるといわれる．

(1) $0 \leqq f \in L^\infty(X) \Rightarrow Sf \geqq 0$;

(2) $S1 \leqq 1$;

(3) $0 \leqq f \in L^1(X) \cap L^\infty(X) \Rightarrow \int Sf\,d\mu \leqq \int f\,d\mu$.

$\mathfrak{S}$ で doubly-substochastic 作用素の全体を表し，$\mathfrak{S}^*$ で $S1 = 1$ となるような $S \in \mathfrak{S}$ の全体を表すことにする．

定理６．$x = (x_1, x_2, \cdots)$ と $y = (y_1, y_2, \cdots)$ を ℓ^1 の元とし，

$$x \geqq 0, \quad y_1 \geqq y_2 \geqq \cdots \geqq y_n \geqq \cdots \geqq 0,$$

$$\sum_{i=1}^{n} y_i \leqq \sum_{i=1}^{n} x_i \quad (n = 1, 2, \cdots), \quad \sum_{i=1}^{\infty} y_i = \sum_{i=1}^{\infty} x_i$$

を満たすものとする．

このとき，$y=Tx$ となるような $T\in\mathfrak{S}^*$ が存在する．

$L^1[0,\infty)$ のとき，Hardy-Littlewood-Pólya の定理はつぎのようになる．

定理7． f, g を $L^1[0,\infty)$ の元とする．g を $(0,\infty)$ 上で monotonically decreasing であるとし，

$$\int_0^s g\,d\mu \leqq \int_0^s f\,d\mu \quad (\forall s\in[0,\infty)),\quad \int_0^\infty g\,d\mu=\int_0^\infty f\,d\mu$$

と満たすとする．このとき，$g=Tf$ となるような $T\in\mathfrak{S}$ が存在する．

特に f が有界なら，$T\in\mathfrak{S}$ は $\mathfrak{S}^*$ の中にとることができる．

参考文献

[1] Browder, F. E., The fixed point theory of multi-valued mappings in topological vector spaces, Math. Ann., 177 (1968), 283-301.

[2] Fan, K., Minimax theorems, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 39 (1953), 42-47.

[3] Fan, K., On systems of linear inequalities, in Linear Inequalities and Related Systems, Ann. of Math. Stud., 38, 99-156, Princeton Univ. Press, Princeton, N. J. (1956).

[4] Fan, K., Existence theorems and extreme solutions for inequalities concerning convex functions or linear transformations, Math. Z., 68 (1957), 205–217.

[5] Fan, K., Extensions of two fixed point theorems of F. E. Browder, Math. Z., 112 (1969), 234–240.

[6] Hardy, G. H., Littlewood, J. E., and G. Pólya, Inequalities, Cambridge Univ. Press, London/New York (1934).

[7] Hirano, N., Komiya, H., and W. Takahashi, A generalization of the Hahn-Banach theorem, J. Math. Anal. Appl., 88 (1982), 333–340.

[8] Kelly, J. L., Namioka, I. et al., Linear topological spaces, Van Nostrand, Princeton, N.J. (1963).

[9] Komiya, H. and W. Takahashi, Systems of linear inequalities on normed linear spaces, Linear & Multilinear Algebra, 13 (1983), 267–279.

[10] König, H., On certain applications of the Hahn-Banach and minimax theorem, Arch. Math., 21 (1970), 583–591.

[11] Mazur, S. and W. Orlicz, Sur les espaces métriques linéares (II), Studia Math., 13 (1953), 137–179.

[12] Ryff, J. V., Orbits of L^1-functions under doubly stochastic transformations, Trans. Amer. Math. Soc., 117 (1965), 92–100.

[13] Sakamaki, K. and W. Takahashi, Systems of convex

inequalities and their applications, J. Math. Anal. Appl., 70 (1979), 445-459.

[14] Shioji, N. and W. Takahashi, Fan's theorem concerning systems of convex inequalities and its applications, to appear in J. Math. Anal. Appl..

[15] Simons, S., Minimax and variational inequalities. Are they of fixed point or Hahn-Banach type?, Game Theory and Mathematical Economics, North Holland Publishing Company (1981), 379-387.

[16] Takahashi, W., Nonlinear variational inequalities and fixed point theorems, J. Math. Soc. Japan, 28 (1976), 168-181.

[17] Takahashi, W., Nonlinear complementarity problem and systems of convex inequalities, J. Optimization Theory & Applications, 24 (1980), 493-508.

[18] 高橋 渉，不動点定理とその周辺，三田学会雑誌，73 (1980)，32-68.

[19] Takahashi, W., Recent results in fixed point theory, SEA Bull. Math., 4 (1981), 59-85.

[20] Takahashi, W., Fixed point, Minimax and Hahn-Banach theorems, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, Amer. Math. Soc., 45 (1986), 417-427.